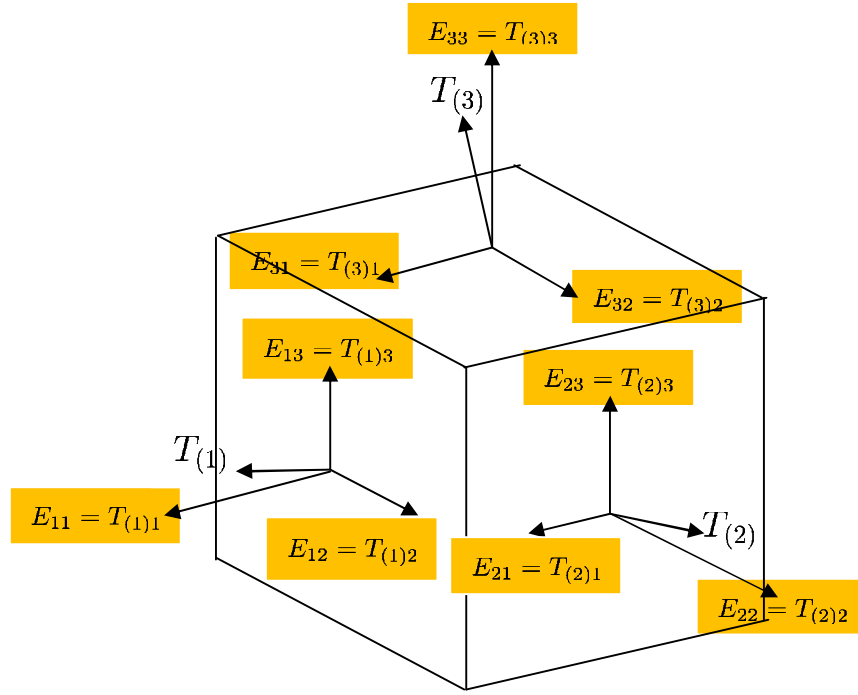


مدخل إلى حُساب المُتدات (المُوترات)
وبعض تطبيقاتها في الهندسة التفاضلية وعلم حركة المواد المتصلة

Introduction to Tensor Calculus with
Applications in Differential Geometry and
Continuum Mechanics



المعادلة (73.1) صفحة (174)، $E_{ij} = T_{(i)j}$ موضحة بالرسم

يحتوي على 153 مسألة محلولة و106 مسألة غير محلولة
جمع وإعداد وترجمة: فيصل أمين ياسين عبد المحسن

إستهلال

إن الممتد في الرياضيات - وفي بعض الدوائر الأكاديمية العربية تُستخدم كلمة المؤثر بدلاً عن الممتد - هو أحد الدلالات الرياضية بجانب الأعداد أو الكميات المطلقة التي لا تتميز بوحدة القياس. يتميز الممتد في خواصه بخواص الأعداد المطلقة والمتجهات والمعاملات الخطية. يمكن للممتد أن يكتب بدلالة الإحداثيات أو كمنظومة أعداد مطلقة لكنه يُعرف على أنه مُستقل عن أي نظام إحداثيات وعليه فإنه يمكن تعريف الممتد على أنه كميات أو مركبات التي في أي نظام إحداثيات ترتبط بقانون تحويلات خطي مُميز خاص عند التغيير من نظام إحداثيات لآخر ونتيجة لذلك إنه إذا كان الممتد يُساوي الصفر في نظام إحداثيات ما، فإنه يُساوي الصفر في أي نظام إحداثيات آخر. للممتدات أهمية كبيرة في الفيزياء والهندسة التطبيقية. ففي مجال تصوير مُمتد الانتشارية المعروف باسم (Imaging Diffusion Tensor) يُعبر الممتد عن النفاذية التفاضلية العضوية للماء ليُعطي مسحاً للدماغ.

هدف هذا الكتاب هو إعطاء تعريف مُتماسك للنتائج الأساسية في حُسبان الممتدات وأيضاً لإيضاح قدرة تقنية الممتدات بتطبيقاته في الهندسة التفاضلية وعلم مرونة الأجسام وعلم حركة الموائع والنظرية الخاصة والعامة للنسبية للفيزيائي أينشتاين.

يحتوي هذا الكتاب على ثمانية فصول. في الخمسة فصول الأولى تم تقديم المفاهيم الرياضية للممتدات من غير إثباتات رياضية مُعقدة. والفصول الثلاثة المتبقية لا تعتمد على بعضها بعض ماعدا الأجزاء (§39) و (§40) بالفصل السادس الذي يشرح الهندسة التفاضلية الإقليدية في الفضاء الثلاثي الأبعاد وهو ضروري لفهم الفصل الثامن الذي يحتوي على نظرية الممتدات الديكارتية وعلم مرونة الأجسام وعلم حركة الموائع. والفصل السابع يحتوي على النظرية الخاصة والعامة للنسبية لأينشتاين.

في هذا الكتاب تم أولاً دراسة المبادي الأساسية للعمليات الجبرية للمُمتدات وتم ربطها بالمفاهيم القاعدة للهندسة الريمانية. وهذا تطلب دراسة رموز كريستوفل والتفاضل متحد التغير والمنحنيات الأقصر طُولاً والتوازي ومُمتد ريمان كريستوفل. وبمساعدة تقنيات المُمتدات تم مناقشة الهندسة التفاضلية الإقليدية.

إن الفصلين السابع والثامن يحتويان على تطبيقات نظرية المُمتدات وهما مُوجهان خصيصاً للفيزياء النظرية. إن نظرية المرونة تم دراستها من المبادي الأولية.

ويعرض هذا الكتاب أيضاً النظرية الخاصة والعامة للنسبية والتي تحتوي على تحويلات لورنتز ومُعادلات ماكسويل للمجال الكهرمغناطيسي والكون المُتماثل كروياً و بُنية فضاء إشوارزشيلد وحركة الكواكب حول الشمس ومسارات أشعة الضوء في الكون من وجهة نظر أينشتاين ودي سيتر.

الإهداء

إلى الذين يؤثرون أهمية وألوية إلى العلم والتعليم المتميز فوق كل شيء آخر.

الشكر

الشكر للبروفسيور / الدكتور عثمان محمد المكي - كلية العلوم الرياضية، جامعة الخرطوم - الذي اقترح تغيير اسم الكتاب من حُسبان المُمتدات وبعض تطبيقاتها في الهندسة التفاضلية والفيزياء إلى مدخل إلى حُسبان المُمتدات وبعض تطبيقاتها في الهندسة التفاضلية وعلم حركة المواد المتصلة حيث تطلب ذلك من المؤلف إضافة عدة أجزاء عن دراسة علم حركة الموائع كإضافة في الفصل الثامن وكتتممه ومواصلة لدراسة علم مرونة الأجسام المتصلة وأيضاً فضل جعل النظرية الخاصة والعامة للنسبية الفصل السابع بدل الثامن. كما اقترح كلمة الإختزال بدل التقلص.

المحتويات

الفصل الأول : حُساب المُمُتدات

1	مُقدمة	1§
1	الفضاء ذو البُعد النُّوني N	2§
2	تحويلات الإحداثيات	3§
3	مُصطلح المؤشرات وقاعدة الجمع	4§
4	المتجهات مُضادة التغيُّر	5§
6	المتجهات مُتحدة التغيُّر	6§
8	اللامتغيرات	7§
9	المُمُتدات ذوات الرُّتبة الثانية	8§
10	المُمُتدات ذوات الرُّتبة أعلى من الثانية	9§
12	جمع وطرح وضرب المُمُتدات	10§
13	التقلُّص أو الإختزال	11§
14	قاعدة قِسمة المُمُتدات	12§
16	المُمُتدات المقلوبة أو المعكوسة والمُتماثلة ذوات الرُّتبة الثانية	13§
17	مسائل محلولة	§
37	مسائل غير محلولة	§

الفصل الثاني : عنُصرُ الخط

39	المُمتد القاعدة	14§
40	طُول المنحنى	15§
41	قيمة المتجه	16§
42	المُمتد المصاحب	17§
43	الزاوية بين مُتجهين التعامُدية	18§
44	المركبات الفيزيائية للمُتجهات والمُمتدات	19§
44	الإتجاهات الأساسية	20§
47	مسائل محلولة	§
54	مسائل غير محلولة	§

الفصل الثالث : التفاضل مُتحد التغير

56	رموز كريستوفل	21§
58	قاعدة تحويل رمُوز كريستوفل	22§
59	التفاضل مُتحد التغير للمُتجهات	23§
62	التفاضل مُتحد التغير للمُمتدات	24§
64	قوانين التفاضل مُتحد التغير	25§
65	التفاضلات الذاتية أو التفاضلات المطلقة	26§
66	مسائل محلولة	§

الفصل الرابع: المنحنيات الأقصر طولاً والتوازي

87	27§	تعريف المنحنيات الأقصر طولاً
90	28§	المنحنيات الأقصر طولاً الصفرية
91	29§	إحداثيات المنحنيات الأقصر طولاً
93	30§	التوازي
96	31§	التفاضل مُتحد التغير
97	§	مسائل محلولة
99	§	مسائل غير محلولة

الفصل الخامس: مُمتد الانحناء

100	32§	مُمتد ريمان كريستوفل
101	33§	مُمتد الانحناء
103	34§	مُمتد ريتشي لا مُتغير الانحناء
104	35§	تطابقية بيناتشي
105	36§	الانحناء الريمانية
106	37§	الفضاء المُسطح المُستو
108	38§	الفضاء ذو الانحناء الثابت

109	§ مسائل محلولة
110	§ مسائل غير محلولة

الفصل السادس : الهندسة التفاضلية في فضاء إقليدي ثلاثي الأبعاد

111	39§ مُمْتَدَّات التباديل
114	40§ حاصل ضرب المتجهات
114	41§ مُعَادَلَات فَرِينِيَه
117	42§ السطح الشكل القاعدة الأول
120	43§ مُتْجَهَات السطح
122	44§ مُمْتَدَّ السطح التبادلي
124	45§ التفاضل مُتْحَد التغير السطح
126	46§ إِنْحْنَاء المُنْحْنِيَّات الأَقْصَر مَسَاراً
127	47§ المُتْجَه العمودي
128	48§ التفاضلات المُتَدِيَّة للمُمْتَدَّات
130	49§ الشكل القاعدة الثاني
131	50§ الشكل القاعدة الثالث
132	51§ مُعَادَلَات جَاوَس كودازي
134	52§ الإِنْحْنَاء العمودي الخُطُوط المُقَارِبَة
136	53§ الإِنْحْنَاءات الأساسية خُطُوط الإِنْحْنَاء
137	§ مسائل غير محلولة

الفصل السابع: النظرية الخاصة والعامة للنسبية

138	النظرية الخاصة للنسبية	54§
141	مُعادلات ماكسويل للكهرمغناطيسية	55§
143	النظرية العامة للنسبية	56§
145	بُنية الفضاء المتماثل كروياً	57§
147	بُنية فضاء شوارزشيلد	58§
148	حركة الكواكب حول الشمس	59§
150	الكون من وجهة نظر أينشتاين	60§
151	الكون من وجهة نظر دي سيتر	61§

الفصل الثامن: الممتدات الديكارتية المرونة وعلم حركة الموائع

153	مقدمة لعلم حركة المواد المتصلة	62§
154	مدخل إلى الخواص المرنة للمواد المتصلة الصلبة	63§
156	قانون هوك الأولي	64§
157	مُعامل الإنزلاق في بُعد واحد: مرونة الشكل	65§
159	مُعامل المرونة الكلي للمادة: مرونة الحجم	66§
161	الرسم البياني لمنحنى الإجهاد الانفعال	67§
162	الخواص المرنة لمادة صلبة في بُعد واحد	68§
164	التحويلات المتعامدة	69§

166	الدوران	70§
169	المُمتدات الديكارتية	71§
170	الإنفعال ذو القيمة الصغيرة جداً للأجسام	72§
173	إجهاد الأجسام المتصلة	73§
177	مُعادلات الإتزان	74§
179	قانون هُوك العام	75§
179	المُمتدات المتساوية الخواص في جميع الإتجاهات	76§
182	الجسم المتجانس وذو الخواص المتساوية في جميع الإتجاهات	77§
185	المحاور المنحنية الخطية	78§
189	المُعادلات الأساسية للمواد المتصلة	79§
191	المواد المتصلة (الموائع)	80§
192	المُعادلات التكوينية للموائع	81§
194	اللزوجة	82§
195	الموائع اللزجة الخطية	83§
199	مُعادلات نافير وإستوكس وديوهمر لحركة مائع	84§
203	المتغيرات القياسية	85§
205	الشروط الحدودية	86§
208	حاشية: هندسة النسب	87§
210	المراجع	§

الفصل الأول: حُساب المُمُتدات

1§. مقدمة

إن مفهوم المُمتد جاء نتاج تطورات الهندسة التفاضلية بفضل كل من جاوس وريمان وكريستوفل. وخُروج علم حُساب المُمُتدات والذي يُعرف بعلم حُساب التفاضل المُطلق كجزء مُنظم من علم الرياضيات يرجع إلى ريتشي وطالبه ليفي شفيتي اللذان نشرَا أول كتاب عن حُساب المُمُتدات وسمياه "طُرق حُساب التفاضل المُطلق وتطبيقاته" عام 1901. إن البحث في العلاقات الرياضية التي تُصبح صالحة عندما نُغير من نظام إحداثيات لآخر هو الهدف الرئيس لحُساب المُمُتدات. إن قوانين الفيزياء لا يُمكن أن تعتمد في شكلها على أطر الإسناد المرجعية التي يستخدمها الفيزيائيون لغرض وصف الظواهر الطبيعية لأن الظواهر الطبيعية موجودة بذاتها بغض النظر عن الإحداثيات المُستخدمة لوصفها. لذلك يُعتبر مرغوباً جَمالياً وأيضاً عُرْفاً دائماً لإستخدام حُساب المُمُتدات كخلفية رياضية لصياغة قوانين الطبيعة. وعلى وجه الخصوص نذكر أن أينشتاين وجد أن المُمُتدات مُعدات مُمتازة لتقديم نظريته العامة للنسبية. وكنّا نتاج لذلك برزت أهمية حُساب المُمُتدات والآن أصبح لاغني عنه في تطبيقاته في معظم فروع الفيزياء النظرية كما أنه أيضاً لا غنى عنه في الهندسة التفاضلية للفضاء الفائق.

من المُفترض أن يكون لقاري هذا الكتاب معرفة أساسية بحُساب المُتجهات والمصفوفات والمُحددات. ولأنه ربما لا يكون مُلمّاً أو مُطلعاً على حُساب التغيرات فإن المسألة الدُنيا في نظرية المُنحنيات الأقصر طُولاً تمت مُعالجتها من الأساسيات الأولية.

2§. الفضاء ذو البعد النوني N

لنعتبر مجموعة مُرتبة من N عدد طبيعي من المُتغيرات $x^1, x^2, \dots, x^i, \dots, x^N$ والتي تأخذ قيم لأعداد حقيقية. هذه المُتغيرات سوف تُسمى إحداثيات نُقطة. (الأعداد $1, 2, \dots, i, \dots, N$ التي توجد أعلى المُتغيرات تُسمى مؤشر علوي وهذه المؤشرات تخدم